

Une infinité de structures de contact tendues sur les variétés toroïdales *

Vincent Colin

Octobre 2000

Abstract

We show that every closed toroidal irreducible orientable 3-manifold carries infinitely many universally tight contact structures.

Résumé

On démontre que toute variété orientable, irréductible, close et toroïdale de dimension 3 porte une infinité de structures de contact universellement tendues.

1 Introduction

Une variété de dimension 3 est dite *toroïdale* si elle contient un tore *incompressible*, c'est-à-dire plongé et π_1 -injecté. L'objectif de ce texte est de démontrer le théorème suivant, qui répond partiellement à une conjecture d'E. Giroux [Gi5, Gi6] :

Théorème 1.1 : *Toute variété de dimension 3, orientable, irréductible, close (compacte sans bord) et toroïdale porte une infinité de structures de contact universellement tendues deux à deux non isomorphes.*

Jusqu'ici, le principal résultat établi l'était pour les variétés irréductibles contenant un tore normal [Co2] : un tore est *normal* s'il est incompressible et si on ne peut pas le disjoindre par isotopie d'un autre tore incompressible. Cette propriété caractérise des variétés dans lesquelles se plongent de manière π_1 -injective un fibré de Seifert de base "assez large". Dans [Co2], on démontre ainsi que toute variété orientable et irréductible qui contient un tore normal porte une infinité de structures de contact universellement tendues.

Comme dans ce premier travail, la démonstration du théorème 1.1 repose sur la notion de torsion, introduite par E. Giroux [Gi3, Gi4, Gi5], et sur l'étude qu'il en a faite dans le cas du tore épais.

*Classification AMS : 57R17, 53D10. Mots clés : variété de contact, structure tendue, torsion, variété toroïdale.

Avant de poursuivre plus avant la discussion, on rappelle quelques notions de géométrie de contact.

Une *structure de contact* sur une variété V de dimension 3 est un champ de plans ξ qui possède une équation locale $\alpha = 0$ telle que la 3-forme $\alpha \wedge d\alpha$ soit une forme de volume. En particulier, sur une variété orientée, toute structure de contact possède un signe (donné par celui de $\alpha \wedge d\alpha$ qui se révèle indépendant du choix de α). Par défaut, toutes les variétés de contact rencontrées par la suite sont supposées orientées et les structures de contact positives.

Les structures de contact se scindent en deux catégories complémentaires : les structures *vrillées* et les structures *tendues*. Une structure ξ sur une variété V est vrillée s'il existe un disque D plongé dans V tel que $\xi|_{\partial D} = T_{\partial D}D$. Si le rappel dans tout revêtement de V d'une structure vrillée est une structure vrillée, ce n'est pas toujours le cas des structures tendues (voir par exemple [Co1]) ; c'est pourquoi on distingue comme sous-catégorie de ces dernières les structures *universellement tendues*, qui restent tendues après un passage au revêtement universel. Aujourd'hui, les structures vrillées sont parfaitement comprises grâce au travail de Y. Eliashberg [El1]. Les structures tendues en revanche restent en partie mystérieuses. Leur étude est d'autant plus intéressante qu'elle se situe à l'intersection de nombreuses branches de la géométrie : théorie des nœuds, théorie des feuilletages, géométrie symplectique...

On décrit à présent des outils intervenant dans l'étude des variétés de contact.

Si S est une surface orientée dans V et si ξ est orientée près de S , en dehors des points $(x_i)_{i \in I}$ de S , génériquement isolés, où $\xi(x_i) = T_{x_i}S$, l'intersection de ξ et de TS est un champ de droites orientées qui s'intègre en un feuilletage de S , appelé *feuilletage caractéristique* de S et noté ξS . Il est singulier en les points x_i . Le feuilletage caractéristique tracé par une structure ξ sur une surface S détermine ξ près de S . En particulier, pour recoller deux structures de contact de même signe situées de part et d'autre d'une surface, il suffit que leurs feuilletages caractéristiques coïncident.

Toute courbe intégrale de ξ est dite *legendrienne*. Si une courbe legendrienne orientée γ est contenue dans une surface S , on définit son *invariant de Thurston-Bennequin relatif*, noté $tb(\gamma, S)$, comme la moitié de la somme algébrique, le long de γ , des intersections entre ξ et TS . Si γ est une courbe positivement transverse à ξ et borde une surface orientée S , le champ de plans $\xi|_S$ admet une section non singulière X . On appelle *autoenlacement* de γ , noté $l(\gamma)$, l'enlacement entre γ et toute courbe obtenue en poussant un peu γ par X .

Pour différencier les structures de contact tendues, E. Giroux [Gi3, Gi4, Gi5] a introduit la notion de *torsion*. Si $T \subset (V, \xi)$ est un tore incompressible dans une variété de contact, on cherche à plonger, pour le plus grand entier naturel n possible, le produit de contact $(T^2 \times [0, 2\pi], \ker(\cos ntdx + \sin ntdy))$ dans la même classe d'isotopie C que celle d'un voisinage tubulaire de T . Cet entier (éventuellement nul, si de tels plongements n'existent pas, ou infini) est la torsion de ξ dans la classe C et est noté $Tor(V, \xi, C)$, ou $Tor(V, \xi)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté. On a vu dans [Co2] comment lire cet invariant sur le nombre de Thurston-Bennequin relatif d'un certain type de courbe. C'est cette stratégie que l'on va à nouveau appliquer pour démontrer le théorème 1.1.

Pour de plus amples détails sur les notions de base de la géométrie de contact, et notamment sur la création et l'élimination de singularités d'un feuilletage ξS par isotopie de S , on

renvoie à [Gi2].

Je remercie chaleureusement E. Giroux de l'aide qu'il m'a apportée dans la recherche de cette démonstration. Je lui dois notamment l'idée de se placer sur un revêtement de groupe $\pi_1(T)$ ainsi que de distinguer les différentes possibilités pour le rappel de T . Une partie de la rédaction de ce texte a été effectuée lors d'un séjour à l'université de Stanford et à l'American Institute of Mathematics. Je remercie ces deux institutions de leur soutien.

2 Recueil de résultats sur la torsion

L'objet de cette section est de répertorier des résultats, principalement dus à E. Giroux, K. Honda et Y. Eliashberg, concernant la torsion des structures de contact universellement tendues sur le tore épais, l'anneau épaissi et le demi-espace. On donne si nécessaire des esquisses de preuves permettant d'explicitier le lien à ces travaux lorsqu'il n'est pas totalement transparent. Le lemme 2.8 peut être également déduit des arguments développés dans [Co2].

2.1 Structures de contact universellement tendues sur le tore épais

Calcul de la torsion sur un modèle

Lemme 2.1 [Gi5] : *Soit ξ la structure de contact définie sur $T^2 \times [-1, 1] = \{(x, y, \theta)\}$ par l'équation $\cos f(\theta)dx + \sin f(\theta)dy = 0$, où $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est à dérivée strictement positive et vérifie : $f(-1) \in [0, 2\pi[$ et $f(1) \in [2n\pi, 2(n+1)\pi[$, $n \in \mathbb{N}$. Alors $Tor(T^2 \times [-1, 1], \xi)$ est la partie entière de $(f(1) - f(-1))/2\pi$, c'est-à-dire n ou $n - 1$.*

Addition des torsions

Lemme 2.2 [Gi5] : *Soit ξ une structure de contact universellement tendue sur $T^2 \times \mathbb{R}$ telle que $\xi|_{T^2 \times \{\pm 1\}}$ soit un feuilletage linéaire. On a :*

$$\begin{aligned} Tor(T^2 \times \mathbb{R}, \xi|_{T^2 \times \mathbb{R}}) &= Tor(T^2 \times]-\infty, -1], \xi|_{T^2 \times]-\infty, -1]}) + Tor(T^2 \times [-1, 1], \xi|_{T^2 \times [-1, 1]}) \\ &\quad + Tor(T^2 \times [1, +\infty[, \xi|_{T^2 \times [1, +\infty[}) + k, \end{aligned}$$

où $k = 0, 1$, ou 2 .

Critère d'annulation de la torsion

Lemme 2.3 : *Soit ξ une structure universellement tendue sur $T^2 \times [-1, 1]$ qui trace sur $T^2 \times \{1\}$ un feuilletage sans singularité ni composante de Reeb avec un nombre fini d'orbites périodiques non dégénérées et un feuilletage linéaire sur $T^2 \times \{-1\}$. On note $A = S^1 \times \{*\} \times [-1, 1] \subset T^2 \times [-1, 1]$. On suppose que ∂A est transverse, ou éventuellement tangent le long de $T^2 \times \{-1\} \cap \partial A$, à ξ . S'il existe un arc legendrien γ plongé dans A joignant un bord de A à l'autre et tel que $tb(\gamma, A) = -\frac{1}{2}$, alors $Tor(T^2 \times [-1, 1], \xi) = 0$.*

Démonstration : On peut toujours supposer que, quitte à changer A en conservant γ , le bord de A est parallèle à aux orbites de $\xi T^2 \times \{1\}$. Après cette modification, on est assuré que $tb(\gamma, A) = 0, -\frac{1}{2}$ ou -1 . Dès lors, pour tout feuilletage non singulier F de $T^2 \times \{1\}$, transverse à ∂A , dont les orbites fermées sont non dégénérées et coïncident avec celles de A (avec une orientation éventuellement différente, mais les orbites attractives restent attractives et les répulsives, répulsives), il existe une isotopie C^0 -petite de $T^2 \times \{1\}$ fixant A ([Gi1]), telle que le feuilletage caractéristique du nouveau tore soit F (ce feuilletage comporte éventuellement des composantes de Reeb). Ce faisant, d'après [Gi5], la torsion du produit délimité par $T^2 \times \{-1\}$ et l'image de $T^2 \times \{1\}$ est la même que celle de $(T^2 \times [-1, 1], \xi)$. On note $(T^2 \times [-1, 1], \xi_F)$ ce nouveau produit. Par construction, on a toujours l'anneau A contenant l'arc legendrien γ qui joignent tous deux un bord de $(T^2 \times [-1, 1], \xi_F)$ à l'autre. On a de plus $tb(\gamma, A) = 0, -\frac{1}{2}$ ou -1 .

Toujours d'après [Gi5] et sa description complète des structures de contact tendues sur le tore épais, si n désigne la torsion de ξ , il existe un feuilletage F de $T^2 \times \{1\}$, un entier k , un réel θ_0 et une fonction f strictement supérieure à $2n\pi$ tels que $(T^2 \times [-1, 1], \xi_F) \simeq \{(x, y, \theta \leq f(y))\} \subset (T^2 \times [0, 2(n+k)\pi], \ker(\cos(\theta + \theta_0)dx + \sin(\theta + \theta_0)dy))$. Dans ces coordonnées, on prolonge A par l'anneau produit $(\partial A \cap \{\theta = f(y)\}) \times \{f(y) \leq \theta \leq 2(n+k)\pi\}$, et l'arc γ_F par $(\partial \gamma_F \cap \{\theta = f(y)\}) \times \{f(y) \leq \theta \leq 2(n+k)\pi\}$. On obtient ainsi un anneau A_F portant un arc legendrien γ_F qui joignent tous deux un bord à l'autre de $T^2 \times [0, 2(n+k)\pi]$. Par construction, $tb(\gamma_F, A_F) \geq -k - \frac{1}{2}$ et, comme ∂A_F est transverse à ξ , on peut également supposer, quitte à effectuer une isotopie de A_F relative à γ_F ne modifiant pas $tb(\gamma_F, A_F)$, que ∂A_F est transverse (ou éventuellement partout tangent) à la structure.

D'après [Ka] (théorème 7.6), on a alors $tb(\gamma_F, A_F) \leq -n - k$. On en déduit que $n \leq \frac{1}{2}$, ce qui implique que l'entier naturel n est nul. ■

Lemme de réalisation

Lemme 2.4 [Gi5] : *Soit ξ une structure de contact universellement tendue sur $T^2 \times [0, +\infty[$ qui trace un feuilletage linéaire sur $T^2 \times \{0\}$. Si ξ est de torsion finie n , il existe $(c, \theta_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un plongement ϕ de $T^2 \times [0, k]$ dans $T^2 \times [0, c]$ laissant invariant $T^2 \times \{0\}$, et tel que $\phi_*\xi$ ait pour équation $\cos(\theta + \theta_0)dx + \sin(\theta + \theta_0)dy = 0$. On peut même imposer que $c = 2\pi(n+2)$.*

On indique simplement comment se ramener à des résultats d'E. Giroux.

D'après [Gi1], quitte à effectuer des isotopies C^0 -petites sur les tores $T^2 \times \{k\}$, on peut toujours supposer que le feuilletage $\xi T^2 \times \{k\}$ comporte un nombre fini d'orbites périodiques non dégénérées. On se place dans cette situation. La structure $\xi|_{T^2 \times [0, k]}$ est alors complètement décrite (voir [Gi5]) par — outre la torsion n et $\xi T^2 \times \{i\}$, pour $i = 0, k$ — la donnée d'une famille d'anneaux $(A_i)_{1 \leq i \leq k}$ deux à deux disjoints dans $T^2 \times [0, k]$, s'appuyant sur les orbites périodiques de $\xi T^2 \times \{k\}$. On considère le produit $T^2 \times [0, k]$ comme naturellement inclus dans $T^2 \times [0, k+1]$. Toujours d'après [Gi5], plonger $(T^2 \times [0, k], \xi)$ dans $(T^2 \times [0, 2\pi(n+2)], \ker(\cos(\theta + \theta_0)dx + \sin(\theta + \theta_0)dy))$ revient à trouver une famille d'anneaux $(A'_i)_{1 \leq i \leq l}$ deux à deux disjoints dans $T^2 \times [k, k+1]$ dont les bords coïncident avec ceux des anneaux de la famille

$(A_i)_{1 \leq i \leq l}$ et telle que la réunion des deux familles constitue un ou deux tores incompressibles dans $T^2 \times [0, k+1]$.

En d'autres termes, la preuve du lemme 2.4 se réduit à la démonstration du lemme suivant, laissée à la sagacité du lecteur :

Lemme 2.5 : *Soit $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq l}$ une famille d'arcs deux à deux disjoints inclus dans $S^1 \times [0, 1]$, dont les extrémités sont incluses dans $S^1 \times \{1\}$. Il existe une famille d'arcs $(\alpha'_i)_{1 \leq i \leq l}$ inclus dans $S^1 \times [1, 2]$, dont les extrémités coïncident avec celles des arcs de la famille $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq l}$, et telle que la réunion des familles $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq l}$ et $(\alpha'_i)_{1 \leq i \leq l}$ forme un ou deux cercles non contractiles dans $S^1 \times [0, 2]$.*

Élimination des singularités

Lemme 2.6 : *Soient ξ une structure universellement tendue sur $V = T^2 \times R$, et $A = S^1 \times \{*\} \times [-1, 1] \subset T^2 \times [-1, 1] \subset T^2 \times R$. On suppose que ∂A est transverse à ξA avec un signe constant et que ξA ne contient que des singularités de même signe. On suppose de plus que $\xi T^2 \times \{1\}$ est un feuilletage sans singularité ni composante de Reeb.*

Il existe une isotopie C^0 -petite de $T^2 \times [-1, 1]$ fixant un voisinage de $A \cup T^2 \times \{1\}$ telle que l'image de $T^2 \times \{-1\}$ porte un feuilletage sans singularité ni composante de Reeb.

Démonstration : On utilise des techniques développées dans [Gi1]. On se place sur un revêtement de degré deux $p : V' \rightarrow V$ de V dans lequel la préimage de A est constituée de deux anneaux disjoints A_1 et A_2 . En particulier, dans ce revêtement, $p^{-1}(A)$ découpe $p^{-1}(T^2 \times [-1, 1])$ en deux tores solides, dont un est dénoté T . Le bord de T est constitué de la réunion de $p^{-1}(A)$ et de deux anneaux B_{-1} et B_1 qui sont envoyés par p respectivement sur $T^2 \times \{-1\}$ et $T^2 \times \{1\}$. On sait par hypothèse que, si ξ' désigne le rappel de ξ dans V' , le feuilletage $\xi'(A_2 \cup B_1)$ ne porte que des singularités de même signe et est soit sortant, soit rentrant le long du bord. En particulier, $l(\partial(A_2 \cup B_1)) = 0$. On a donc aussi $l(\partial(A_1 \cup B_{-1})) = 0$. Comme $\xi' A_1$ ne présente que des singularités de même signe et que $\xi' A_1$ est soit rentrant, soit sortant le long de ∂A_1 , ces singularités s'éliminent toutes par une isotopie de A_1 fixant B_{-1} (voir [Gi1]). On en déduit que les singularités de B_{-1} s'éliminent par une isotopie C^0 -petite de B_{-1} fixant un voisinage de son bord (voir [Gi1]), ce qui, transcrit dans V , fournit le résultat recherché. ■

2.2 Structures universellement tendues sur $R \times S^1 \times [0, 1]$

On étend la notion de torsion aux structures définies sur, respectivement, $R \times S^1 \times S^1 = \{(x, y, \theta)\}$ et $R \times S^1 \times [0, 1]$ (avec des coordonnées similaires), en remplaçant la recherche de plongements de $T^2 \times [0, 2\pi]$ par celle de plongements (propres et π_1 -injectifs) de $(R \times S^1 \times [0, 2\pi], \ker(\cos n\theta dx + \sin n\theta dy))$ respectivement non séparant et parallèles au bord. On parle alors de torsion annulaire. Le résultat suivant découle de [Co2]. Il peut être également déduit des techniques développées dans [Gi5].

Lemme 2.7 [Co2, Gi5] : *Toute structure de contact universellement tendue sur $R \times S^1 \times S^1$ est de torsion annulaire finie.*

Corollaire 2.8 : *Toute structure de contact universellement tendue ξ sur $V = R \times S^1 \times [-1, 1] = \{(x, y, \theta)\}$ qui a pour équation $\cos f(\theta)dx + \sin f(\theta)dy = 0$ sur $R \times S^1 \times [-1, -1 + \epsilon]$ et $R \times S^1 \times [1 - \epsilon, 1]$ a une torsion annulaire finie.*

Démonstration : On note $g : [2, 3] \rightarrow R$ une fonction de dérivée strictement positive avec $g(2) = f(1) \bmod 2\pi$ et $g(3) = f(-1) \bmod 2\pi$. Le champ de plans ζ donné par l'équation $\cos g(\theta)dx + \sin \theta dy = 0$ est une structure de contact sur $R \times S^1 \times [2, 3] = \{(x, y, \theta)\}$. En identifiant $R \times S^1 \times \{1\} \subset V$ avec $R \times S^1 \times \{2\}$ d'une part, et $R \times S^1 \times \{-1\} \subset V$ avec $R \times S^1 \times \{3\} \subset V$ d'autre part, on obtient, en prolongeant ξ par ζ , une structure de contact η sur $W = R \times S^1 \times S^1$. La structure η est universellement tendue par application d'une version annulaire du théorème de recollement 4.3 (voir [Co1]). On applique alors le lemme 2.7 pour conclure. ■

2.3 Structures tendues sur le demi-espace $R^2 \times [0, +\infty[$

Sur le demi-espace $R^2 \times [0, +\infty[$, la notion de torsion disparaît comme le montre le théorème de classification suivant, dû à Y. Eliashberg.

Lemme 2.9 [E-T] : *Si ξ est une structure tendue sur $R^2 \times [0, +\infty[= \{(x, y, t)\}$ qui a pour équation $\cos t dx + \sin t dy = 0$ sur $R^2 \times [0, \epsilon[$, alors elle est conjuguée à la structure définie globalement par la même équation par un difféomorphisme qui est l'identité près du bord.*

3 Décomposition topologique du problème

Une surface S ($\neq S^2, D^2$) plongée dans une variété de dimension 3 est dite *incompressible* si son groupe fondamental s'injecte dans celui de V .

Soit V une variété de dimension 3 orientable, irréductible et close qui contient un tore incompressible.

On sait d'après W. Jaco, P. Shalen et K. Johannson [Ja, J-S, Jo] qu'il existe une collection minimale finie $(T_i)_{0 \leq i \leq n}$ de tores incompressibles deux à deux disjoints, unique à permutation et isotopie près, telle que toute composante de $V \setminus \cup_{0 \leq i \leq n} T_i$ soit ou un fibré de Seifert, ou atoroidale (c'est-à-dire dans laquelle tout tore incompressible est parallèle à une composante de bord).

Si V est un fibré de Seifert, on note T un tore incompressible quelconque de V . Dans le cas contraire, la collection $(T_i)_{0 \leq i \leq n}$ découpant V est non vide et on pose $T = T_0$. On note $\pi : \bar{V} \rightarrow V$ le revêtement de V de groupe $\pi_1(T)$. Deux situations peuvent se produire :

- a) tous les relevés de T dans \bar{V} sauf un sont des plans ;

- b) il existe un revêtement $p : \tilde{V} \rightarrow V$ de groupe Z dans lequel deux relevés \tilde{T}_1 et \tilde{T}_2 de T sont des anneaux conjugués à $S^1 \times R$.

Dans les deux cas, on note \bar{T} un relevé compact de T dans \bar{V} .

Lemme 3.1 : *Dans le cas a), on note \bar{V}_1 et \bar{V}_2 l'adhérence dans \bar{V} des deux composantes de $\pi^{-1}(V \setminus T)$ adjacentes à \bar{T} . La variété \bar{V} est alors obtenue en recollant à chaque composante de $\partial(\bar{V}_1 \cup \bar{V}_2)$ un demi-espace ($\simeq R^2 \times [0, \infty[$). En particulier, \bar{V} est difféomorphe à l'intérieur de $\bar{V}_1 \cup \bar{V}_2$ dans \bar{V} . Topologiquement, elle est également conjuguée à $T^2 \times R$.*

Démonstration : Comme V est Haken, elle est revêtue par R^3 et tout relevé P de T dans R^3 découpe R^3 en deux demi-espaces. En recollant, suivant les cas, un de ces deux demi-espaces aux composantes de bord non compactes de \bar{V}_1 et \bar{V}_2 , on obtient un revêtement de V , qui est de groupe $\pi_1(T)$ d'après le théorème de Van Kampen. Il est donc conjugué à \bar{V} .

Le fait que \bar{V} soit conjugué à $T^2 \times R$ est un résultat classique de topologie expliqué dans [Si, Ja]. ■

De la même manière, on montre le résultat suivant :

Lemme 3.2 : *Dans le cas b), la variété \tilde{V} est conjuguée à $R \times S^1 \times R$ et les deux anneaux \tilde{T}_1 et \tilde{T}_2 à $R \times S^1 \times \{-1\}$ et $R \times S^1 \times \{1\}$. On note \tilde{V}_1 et \tilde{V}_2 l'adhérence des composantes de $p^{-1}(V \setminus T)$ adjacentes à, respectivement, \tilde{T}_1 , et \tilde{T}_2 et qui ne rencontrent pas le produit $R \times S^1 \times]-1, 1[$. Trois cas peuvent alors se produire :*

- $b_1)$ *La composante de Seifert adjacente à T ne fibre pas au-dessus d'une bande de Möbius et, pour $i = 1, 2$, les composantes de $\partial\tilde{V}_i \setminus \tilde{T}_i$ sont toutes des plans. La variété \tilde{V} est alors obtenue à partir de $R \times S^1 \times [-1, 1]$ en recollant \tilde{V}_1 sur $T^2 \times \{-1\}$ et \tilde{V}_2 sur $T^2 \times \{1\}$, puis en recollant à chaque composante de bord restante de \tilde{V}_1 et \tilde{V}_2 des demi-espaces ($\simeq R^2 \times [0, \infty[$). Dans ce cas, on note $q : \tilde{V} \rightarrow \bar{V}$ l'application de revêtement qui envoie \tilde{T}_1 sur \bar{T} . L'image de \tilde{V}_1 par q est conjuguée à $T^2 \times [0, +\infty[$ et q induit un difféomorphisme de \tilde{V}_2 sur son image. Toutes les composantes de bord de $q(\tilde{V}_1 \cup R \times S^1 \times [-1, 1] \cup \tilde{V}_2)$ sont des plans et on a : $\bar{V} \simeq \text{Int}(q(\tilde{V}_1 \cup (R \times S^1 \times [-1, 1]) \cup \tilde{V}_2))$.*
- $b_2)$ *La composante de Seifert M adjacente à T fibre au-dessus d'un ruban de Möbius et deux relevés consécutifs \bar{T} et \bar{T}' de T dans \bar{V} sont des tores. On note \bar{V}_1 et \bar{V}_2 les deux composantes de $\pi^{-1}(V \setminus T)$ attachées à l'extérieur du produit P relevant M et délimité dans \bar{V} par ces tores. Les composantes de bord de \bar{V}_1 et \bar{V}_2 autres que \bar{T} et \bar{T}' sont toutes des plans. La variété \bar{V} est alors conjuguée à $\text{Int}(\bar{V}_1 \cup P \cup \bar{V}_2)$.*
- $b_3)$ *Il existe un revêtement de V conjugué à $R \times S^1 \times S^1$ dans lequel T possède un rappel conjugué à $R \times S^1 \times \{*\}$.*

Démonstration : Dire que deux anneaux proprement plongés et π_1 -injectés dans $R \times S^1 \times R$ bordent un produit est un résultat classique pour lequel on renvoie à [Wa].

Pour obtenir une image plus précise de la situation, on va utiliser la position de T par rapport à la décomposition de Jaco-Shalen de V .

Tout d'abord, on peut dire que si V est un fibré de Seifert, on est dans le cas b_3). Dans cette situation en effet, V possède un revêtement fini \hat{V} qui fibre sur le cercle. Quitte à considérer un revêtement de degré 2 de \hat{V} , on se ramène au cas où \hat{V} fibre au-dessus d'une surface orientable S . Tout rappel \hat{T} de T dans \hat{V} est alors incompressible et est, à isotopie près, saturé pour cette fibration (cf. [He]). La surface S est donc de genre strictement positif. Soit α une courbe fermée simple dans S telle que \hat{T} soit isotope au rappel de α dans \hat{V} . On note β une courbe fermée simple dans S que l'on ne peut pas disjoindre de α par isotopie, dont l'existence est assurée par la minoration du genre de S , et \hat{T}' le rappel de β dans \hat{V} . Il n'existe alors pas d'isotopie de disjonction de \hat{T} et \hat{T}' (et \hat{T} est un tore normal). Le revêtement W de \hat{V} de groupe $\pi_1(\hat{T}')$, vu comme revêtement de V , possède les propriétés requises dans le cas b_3) (voir par exemple [Co2]).

Sinon, on est par hypothèses dans le cas où T est isotope à un des tores de la décomposition de Jaco-Shalen.

Soit \bar{T}' un relevé de T dans \bar{V} , distinct de \bar{T} , qui est un anneau infini (conjugué à $R \times S^1$) ou un tore. On note K l'adhérence de la composante de $\bar{V} \setminus (\bar{T} \cup \bar{T}')$ qui rencontre \bar{T} et \bar{T}' . D'après le théorème de Van Kampen, $\pi_1(K) = \pi_1(\bar{V}) = Z^2$. Il existe alors dans \bar{T}' une courbe fermée simple homologue à une courbe fermée simple de \bar{T} . Ces deux courbes bordent une surface dans K que l'on peut toujours rendre incompressible et qui est donc un anneau, car $\pi_1(K) = Z^2$. D'après le théorème de l'anneau VIII.10 de [Ja], \bar{T} et \bar{T}' doivent border un même relevé d'une composante du découpage de Jaco-Shalen qui est un fibré de Seifert M . En particulier, tous les relevés de T dans \bar{V} qui ne sont pas des plans doivent border l'adhérence d'une même composante de $\pi^{-1}(V \setminus T)$.

- Si \bar{T}' est un tore, la composante de Seifert M possède un revêtement de degré deux conjugué à $T^2 \times [0, 1]$: il s'agit d'une fibration en cercles sur un ruban de Möbius (cf. [Ja]). Tous les relevés de T autres que \bar{T} et \bar{T}' sont, d'après ce qui précède, des plans. La même étude que celle de la configuration a) permet de terminer la démonstration dans ce cas.

- Si \bar{T}' est un anneau, par passage au revêtement, on obtient que tous les relevés de T dans \tilde{V} qui ne sont pas des plans doivent border l'adhérence d'une même composante de $p^{-1}(V \setminus T)$, ce qui suffit à ramener la démonstration, comme dans le cas du lemme précédent, à une utilisation du théorème de Van Kampen et à des raisonnements élémentaires sur les revêtements : par exemple, en recollant des demi-espaces, judicieusement choisis dans le revêtement universel de V , aux composantes de bord de $\tilde{V}_1 \cup (R \times S^1 \times [-2, 2]) \cup \tilde{V}_2$ (qui sont toutes planes d'après ce qui précède), on obtient un revêtement de V de groupe Z qui est donc conjugué à \tilde{V} . ■

Remarque 3.3 : Plus généralement, on peut dire que, si T est normal (ce qui équivaut à dire que T n'est pas isotope à l'un des tores de la décomposition de Jaco-Shalen-Johannson), on est dans le cas b_3) : il existe en effet un relevé annulaire \tilde{T}_3 de T situé hors du produit délimité dans \tilde{V} par \tilde{T}_1 et \tilde{T}_2 (voir [Co2]), et on est dans la situation où au moins deux anneaux parmi ceux de la famille $(\tilde{T}_i)_{1 \leq i \leq 3}$ bordent un produit P (conjugué à $R \times S^1 \times [0, 1]$) avec une coorientation (obtenue en relevant une coorientation de T) rentrante dans le produit pour l'un

et sortante pour l'autre. Si ϕ est un difféomorphisme entre ces deux anneaux commutant avec p et préservant l'orientation, la variété obtenue par identification des deux bords de P à l'aide de ϕ fournit une variété W , conjuguée à $R \times S^1 \times S^1$, qui est un revêtement de V dans lequel T possède un rappel (donné par l'image de ∂P) conjugué à $R \times S^1 \times \{*\}$. La démonstration du théorème 1.1 dans ce cas a déjà été essentiellement traitée dans [Co2].

4 Construction de la suite d'exemples

Pour construire des structures de contact tendues, on dispose d'un important travail effectué par D. Gabai [Ga] d'une part et par Eliashberg-Gromov [El3, Gr] et Eliashberg-Thurston [E-T] d'autre part.

Un feuilletage est dit *tendu* s'il possède une transversale fermée qui rencontre toutes ses feuilles. L'existence des feuilletages tendus a été largement étudiée par D. Gabai. On rappelle qu'une surface incompressible est dite *minimale* si elle minimise le genre dans sa classe d'homologie. Ici, la surface n'est pas supposée connexe, mais on suppose qu'aucune composante n'est une sphère ou un disque, et le genre désigne alors la somme des genres des composantes connexes.

Théorème 4.1 [Ga] : *Soient V une variété compacte irréductible de dimension 3 bordée par une réunion non vide de tores et S une surface minimale dans V qui représente un élément non nul de $H_2(V, \partial V, \mathbb{Z})$. Il existe un feuilletage tendu dont une feuille est S et qui trace sur ∂V un feuilletage sans singularité ni composante de Reeb.*

Un *feuilletact* est un champ de plans $\xi = \ker \alpha$ tel que la 3-forme $\alpha \wedge d\alpha$ soit de signe constant. Cette notion interpole entre les notions de feuilletage (où $\alpha \wedge d\alpha$ est identiquement nulle) et de structure de contact (où $\alpha \wedge d\alpha$ ne s'annule pas).

Théorème 4.2 [E-T] : *Tout feuilletact ξ est limite C^0 de structures de contact qui coïncident avec ξ sur un compact où il est déjà de contact.*

Pour prouver qu'une variété de contact (V, ξ) est tendue, on dispose d'un critère dû à Y. Eliashberg et M. Gromov [El3, Gr] : il suffit qu'il existe une variété symplectique $(W, \tilde{\omega})$ ($\tilde{\omega}$ est une 2-forme fermée non dégénérée) qui *remplisse* (V, ξ) , ce qui signifie que $\partial W = V$, que $\tilde{\omega}|_\xi$ est non dégénérée et que $\tilde{\omega}$ oriente $V = \partial W$ comme ξ .

En particulier (voir [E-T]), il suffit qu'il existe une 2-forme fermée ω sur V qui *domine* ξ , c'est-à-dire telle que $\omega|_\xi$ soit non dégénérée, ainsi qu'une structure négative ξ' également dominée par ω .

Dans ce cas en effet, la 2-forme $\tilde{\omega} = p^*\omega + \epsilon ds\alpha$ obtenue à partir de ω sur $V \times [0, 1]$ — s est la coordonnée sur $[0, 1]$, ϵ est un réel positif assez petit, $p : V \times [0, 1] \rightarrow V$ la projection sur V et $\alpha = 0$ est une équation de ξ — détermine un remplissage symplectique de $(V, \xi) \amalg (V, \xi')$ et le théorème de remplissage de [El3, Gr] assure alors que ξ et ξ' sont tendues.

Plus généralement, dans le cas où $(V, \xi) = \partial(W, \tilde{\omega})$ n'est pas compacte, il faut supposer de plus, outre le fait que $\tilde{\omega}|_\xi > 0$, qu'il existe une structure presque complexe J sur W qui préserve ξ et telle que $\tilde{\omega}(*, J*)$ soit une métrique riemannienne g avec les propriétés suivantes :

- g est complète ;
- le rayon d'injectivité de g est minoré par un réel strictement positif ;
- la courbure sectionnelle de g est majorée.

On dit alors que $(W, \tilde{\omega})$ à une *géométrie finie à l'infini*, et, d'après [El3, E-T, Gr], toute variété de contact bordée par une variété symplectique qui possède une géométrie finie à l'infini est tendue.

D'après un travail de D. Sullivan [Su], imposer l'existence d'une telle 2-forme pour un feuilletage équivaut à dire qu'il est tendu.

Une autre stratégie pour construire des structures tendues est de déterminer leur comportement par rapport à certaines opérations de chirurgies.

Théorème 4.3 [Co1] : *Soient (V, ξ) une variété de contact et $T \subset V$ un tore incompressible. Si $\xi|_T$ est un feuilletage linéaire et si la variété $(V \setminus T, \xi|_{V \setminus T})$ est universellement tendue, alors (V, ξ) l'est aussi. La conclusion est la même si T est un anneau incompressible plongé qui possède un voisinage tubulaire conjugué à : $(R \times S^1 \times [-\epsilon, \epsilon] = \{(x, y, \theta)\}, \ker(\cos(\theta + \theta_0) + \sin(\theta + \theta_0)))$, avec $\epsilon, \theta_0 \in R$.*

C'est sur cette chaîne de résultats qu'on se fonde pour prouver le lemme suivant, légère adaptation d'un énoncé de K. Honda, W. Kazez et G. Matić [HKM], qui précise le travail d'Eliashberg et Thurston.

Lemme 4.4 (voir [HKM]) : *Soit V une variété orientée de dimension 3, qui est irréductible, compacte et dont le bord est une réunion non vide de tores incompressibles. Soit S une surface minimale plongée dans V , chaque composante connexe de S étant de bord non vide plongé dans ∂V . Il existe une structure de contact universellement tendue positive ξ sur V , qui trace sur ∂V un feuilletage linéaire et sur chaque composante de S un feuilletage transverse au bord avec un signe constant, sans orbite périodique et dont toutes les singularités sont de même signe.*

Démonstration : D'après le théorème 4.1 de Gabai, il existe un feuilletage tendu F dont S est une feuille et qui trace sur ∂V un feuilletage sans singularité ni composante de Reeb. Quitte à modifier F , on peut supposer qu'il est conjugué à un feuilletage produit $S \times [-1, 1]$ près de $S \simeq S \times \{0\}$.

Soit alors ω une 2-forme fermée, donnée par [Su], qui domine F . On modifie ω près de chaque composante T de ∂V de la manière suivante. Soit $T \times [-1, 0] = \{(x, y, \theta)\}$ un système de coordonnées près de $T \simeq T \times \{0\}$ tel que F soit tangent à ∂_θ et transverse à ∂_y ($F \cap T$ est sans composante de Reeb). On suppose de plus que $S \times [-1, 1] \cap T$ est donné par l'équation $dy = 0$. La 2-forme ω est fermée et s'écrit donc dans ces coordonnées : $\omega = adx \wedge dy + d\eta$ pour un certain réel a et une certaine 1-forme η .

Si $g : [-1, 0] \rightarrow R$ est une fonction positive, nulle près de -1 et strictement positive sur $[-\frac{1}{2}, 0]$, qui vaut 1 au voisinage de 0, et si $\chi : [-1, 0] \rightarrow R$ vaut 1 sur $[-1, -\frac{1}{4}]$ et 0 près de 0, on pose, pour $t \in R$,

$$\omega_t = adx \wedge dy + d(\chi\eta) + tg(\theta)d\theta \wedge dx.$$

Cette forme ω_t est fermée, coïncide avec ω près de $T \times \{-1\}$ et, si t est assez grand, domine F . On fixe un tel réel t , assez grand pour chaque composante de bord, et on note ω'_t la 2-forme obtenue en raccordant ω_t à ω près de chaque composante de bord. On colle alors à chaque composante de bord T un produit $T \times [0, +\infty[= \{(x, y, \theta)\}$ (les coordonnées prolongent celles déjà construites sur $T \times [-1, 0]$) sur lequel on prolonge F par un feuilletage produit et ω'_t par la 2-forme $adx \wedge dy + td\theta \wedge dx$. On note V' cette nouvelle variété, F' le nouveau feuilletage et ω_t'' la nouvelle forme.

On revient à présent sur V . On trace sur S un feuilletage orienté L transverse à ∂S , dont les singularités sont des selles ou des foyers de divergence positive (pour une certaine orientation de S fixée) et ne présentant pas d'orbite périodique. On choisit L sortant le long de ∂S . Un tel feuilletage est donné par le noyau d'une 1-forme β avec $d\beta > 0$ (voir par exemple [Gi2]). Soit alors $f : [-1, 1] \rightarrow R$ une fonction lisse, nulle en ± 1 et strictement positive à l'intérieur. Si t désigne la coordonnée transverse à S dans son voisinage $S \times [-1, 1]$, la 1-forme $\alpha = dt + f(t)\beta$ vérifie : $\alpha \wedge d\alpha = f(t)dt \wedge d\beta$. Le noyau de α est donc une structure de contact sur $S \times]-1, 1[$ qui trace L sur S , et coïncide avec F au bord. On construit ainsi sur V un feuilletage positif ξ_0 qui trace le feuilletage désiré sur S . La proximité de ξ_0 à F est donnée par la taille de f .

Soit à nouveau T une composante de ∂V et $\{x = x_0\}$ une équation de $S \cap T$. Le feuilletage $\xi_0 T$ a une équation de la forme $dy + h(x, y)dx = 0$, avec $h(x_0, y) > 0$. Soit alors $H : T^2 \times [0, \infty[\rightarrow R$ une fonction lisse qui possède les propriétés suivantes :

- $\frac{\partial H}{\partial \theta}(x, y, \theta) > 0$;
- $\lim_{\theta \rightarrow +\infty} H = c_0, c_0 \in R$;
- $H(x, y, 1) = c_1, c_1 \in R$;
- $H(x, y, 0) = h(x, y)$.

Le champ de plans défini sur $T^2 \times [0, +\infty[$ comme $\{dy + Hdx = 0\}$ est une structure de contact qui prolonge ξ_0 en un feuilletage. Elle est transverse à ∂_y et trace sur chaque tore $T \times \{1\}$ un feuilletage linéaire d'équation $dy + c_1 dx = 0$. Elle trace de plus sur $(S \cap T) \times [0, 1]$ un feuilletage non singulier, dirigé par ∂_θ , et donc sans orbite périodique.

On effectue ce prolongement près de chaque composante de ∂V pour obtenir un feuilletage sur V' . Si t est choisi assez grand, la 2-forme ω_t'' domine ce champ de plans. Le feuilletage ainsi construit sur V' peut être approximé, d'après le théorème 4.2, par une structure de contact ξ . Comme la condition de domination est ouverte pour la topologie C^0 , la structure ξ est dominée par ω_t'' . Pour construire une structure de contact négative ξ' dominée par ω_t'' , il suffit d'appliquer à nouveau le théorème 4.2 pour approximer le feuilletage F' par une structure négative. La variété V' n'est pas compacte, mais la forme ω_t'' est "constante" à l'infini. On peut appliquer le théorème de Gromov et Eliashberg [Gr, El3] pour conclure que (V', ξ) est universellement tendue : on s'aperçoit que la forme symplectique $\tilde{\omega} = p^*\omega''_t + \epsilon ds\alpha$ obtenue à partir de ω''_t sur $V \times [0, 1]$ — s est la coordonnée sur $[0, 1]$, ϵ est un réel positif assez petit, $p : V \times [0, 1] \rightarrow V$ la projection sur V et $\alpha = 0$ est une équation de ξ —, ainsi que son rappel dans le revêtement universel de $V \times [0, 1]$, a une géométrie finie à l'infini (cf. [E-T]).

Pour conclure, il suffit de remarquer que V est conjuguée à $V' \setminus (\cup_{T \subset \partial V} T \times]1, \infty[)$. ■

Soit V une variété irréductible, orientée, close, $T \subset V$ un tore incompressible et $T \times [-1, 1]$, $T \times \{0\} \simeq T$ un voisinage tubulaire de T . On note $S \subset V \setminus T \times]-1, 1[$ une surface minimale (dont l'existence est assurée dans [He]) qui rencontre les deux tores $T \times \{\pm 1\}$ et dont toutes les composantes connexes sont à bord.

D'après le lemme 4.4, il existe une structure de contact universellement tendue ξ^0 sur $V \setminus T \times]-1, 1[$ avec les propriétés suivantes :

- ξ^0 trace un feuilletage linéaire sur $T \times \{\pm 1\}$;
- ξ^0 est transverse à ∂S et trace sur S un feuilletage sans orbite périodique dont toutes les singularités ont le même signe.

Sur $T \times [-1, 1]$, muni des coordonnées (x, y, θ) , on prolonge ξ^0 par une structure d'équation $\cos f_n(\theta)dx + \sin f_n(\theta)dy = 0$, où $f_n : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de dérivée strictement positive qui vérifie : $f_n(-1) \in [0, 2\pi[$; $f_n(1) \in [2n\pi, 2(n+1)\pi[$, ces valeurs étant telles que les feuilletages tracés sur $T \times \{\pm 1\}$ par les structures situées de part et d'autre coïncident.

D'après le théorème de recollement 4.3, toute structure ξ_n ainsi construite sur V est universellement tendue.

Théorème 4.5 : *La suite $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ comporte une infinité de structures de contact deux à deux non isomorphes.*

On note C la classe d'isotopie du tore T dans V . Pour montrer le théorème 4.5, il suffit de démontrer le résultat suivant :

Théorème 4.6 : $Tor(V, \xi_n, C) < \infty$.

Voici, en effet, comment déduire le théorème 4.5 du théorème 4.6.

D'après [Co2], si ξ est une structure universellement tendue sur V seul un nombre fini (à reparamétrisation près) de classes d'isotopie D de plongements de $T^2 \times [0, 2\pi]$ dans V fournissent une torsion $Tor(V, \xi, D)$ non nulle. On note $(C_i^n)_{1 \leq i \leq k_n}$ ces classes pour (V, ξ_n) , $C = C_0^n$, et $T_n = \sup_{1 \leq i \leq k_n} \{Tor(V, \xi_n, C_i^n), \text{ avec } Tor(V, \xi_n, C_i^n) < \infty\}$, qui est bien défini et supérieur à n car $n \leq Tor(V, \xi_n, C_0^n) < \infty$. Ainsi, si $p \in \mathbb{N}$ est choisi assez grand, $T_p > T_n$. Si u_n est une suite d'entiers telle que la suite T_{u_n} soit strictement croissante, on est alors assuré que les structures de contact ξ_{u_n} sont deux à deux non isomorphes.

5 Preuve du théorème 4.6

5.1 Configuration a)

Dans cette partie, on va montrer que $Tor(V, \xi_n, C)$ vaut $n - 1$, n , $n + 1$ ou $n + 2$.

Soient $T \subset V$ un tore incompressible dans la configuration a) et ξ_n une structure de contact universellement tendue construite selon la méthode proposée plus haut. On note $\bar{\xi}_n$ le rappel de ξ_n sur \bar{V} et $\bar{T} \times [-1, 1]$ le relevé de $T \times [-1, 1]$ qui contient $\bar{T} \simeq \bar{T} \times \{0\}$. On note de plus \bar{V}_1' et \bar{V}_2' les deux relevés de $V \setminus T \times]-1, 1[$ dans \bar{V} adjacents à $\bar{T} \times [-1, 1]$.

Lemme 5.1 : $(\bar{V}, \bar{\xi}_n)$ est contactomorphe à $(\text{Int}(\bar{V}_1' \cup (\bar{T} \times [-1, 1]) \cup \bar{V}_2'), \bar{\xi}_n|_{\text{Int}(\bar{V}_1' \cup (\bar{T} \times [-1, 1]) \cup \bar{V}_2')})$.

Démonstration : On sait par construction que les relevés non compacts de $T \times \{\pm 1\}$ dans \bar{V} ont des voisinages tubulaires disjoints conjugués à $(R^2 \times [-\alpha, \alpha], \ker(\cos tdx + \sin tdy))$.

On remarque alors à l'aide du lemme 2.9 (et du lemme 3.1) que la structure $\bar{\xi}_n$ est conjuguée, sur chaque composante de $\bar{V} \setminus \text{Int}(\bar{V}_1' \cup (\bar{T} \times [-1, 1]) \cup \bar{V}_2')$, à $(R^2 \times [0, \infty[, \ker(\cos tdx + \sin tdy))$. Dans \bar{V} , on a donc un plongement de $(R^2 \times [-\alpha, \infty[, \ker(\cos tdx + \sin tdy))$ près de chaque composante de bord non compacte de \bar{V}_1' et \bar{V}_2' (celles-ci étant identifiées avec $R^2 \times \{0\}$). On conclut grâce à un changement de variable explicite bien connu (voir par exemple [Co1], remarque 4.3), ou par une nouvelle application du lemme 2.9, qui envoie $(R^2 \times [-\alpha, \infty[, \ker(\cos tdx + \sin tdy))$ sur $(R^2 \times [-\alpha, 0[, \ker(\cos tdx + \sin tdy))$ en laissant invariant un voisinage de $R^2 \times \{-\alpha\}$. ■

Par la suite, M désigne la variété \bar{V}_1' ou \bar{V}_2' privée de ses composantes de bord non compactes, et ζ la structure induite par $\bar{\xi}_n$ sur M . On rappelle que M est difféomorphe à $T^2 \times [0, +\infty[$.

Lemme 5.2 : La variété (M, ζ) est de torsion nulle.

Démonstration : Quitte à changer l'orientation de S , on suppose que toutes les singularités de ζS sont positives. On note S' un rappel de S dans M , de groupe fondamental Z . La surface S' est difféomorphe à un demi-anneau infini $S^1 \times [0, \infty[$. Son bord est inclus dans celui de M . Le feuilletage de S' est formé de singularités positives, et toute feuille de ce feuilletage aboutit en un temps fini à l'une des singularités. Il contient un unique cycle fermé, parallèle au bord.

Par une isotopie C^0 -petite de S' on fait apparaître, sur chaque liaison entre deux selles de $\zeta S'$, un foyer et une selle positives. On note S'' cette nouvelle surface. Dans $\zeta S''$ on ne peut pas trouver de chemin formé de liaisons contenant 4 selles consécutives.

Pour tout anneau $A \subset S''$, $\partial S'' \subset \partial A$, l'ensemble ω_- -limite de A par le flot de ζA est un graphe de singularités fini Γ , formé d'arbres venant se greffer sur le cycle fermé. Soit s une selle de ce graphe et l une séparatrice stable de s . La séparatrice l provient alors soit d'un foyer, soit d'une selle s' . À leur tour, les séparatrices stables de s' proviennent soit d'un foyer, soit d'une selle dont chaque séparatrice stable provient alors d'un foyer.

Le graphe Γ est donc inclus dans un graphe Γ' fini dont toutes les extrémités sont des foyers et qui contient toutes les séparatrices stables de ses sommets. Le graphe Γ' possède alors un voisinage tubulaire (qui est un anneau) de bord transverse à ζA .

On déduit de ces remarques qu'il existe une exhaustion de S'' par une suite d'anneaux emboîtés $(A_i)_{i \in N}$, telle que :

- pour tout $i \in N$, $\partial S'' \subset \partial A_i$;
- pour tout $i \in N$, ∂A_i est transverse à ζ et le feuilletage ζA_i est sortant sur les deux bords.

Comme A est proprement plongé et π_1 -injecté dans M , on peut montrer, à l'aide des techniques développées dans [Wa], que le couple (M, A) est conjugué à $(S^1 \times S^1 \times [0, +\infty[, \{*\} \times S^1 \times [0, +\infty[)$. En particulier, il existe une exhaustion de M par une famille de tores épais (conjugués à $T^2 \times [0, 1]$) $(T_i)_{i \in N}$ telle que :

- $\partial M \subset \partial T_i$;
- T_i rencontre transversalement S'' le long de A_i .

D'après le lemme 2.6 déduit des travaux de E. Giroux, on peut supposer de plus que ∂T_i présente un feuilletage sans singularité ni composante de Reeb.

Pour conclure, on remarque que chaque anneau A_i porte un arc legendrien γ_i , défini comme réunion de feuilles de ζA_i , qui joint un bord de A_i à l'autre, et tel que $tb(\gamma_i, A_i) = -\frac{1}{2}$ car toutes les singularités de ζA_i ont le même signe. En particulier, le lemme 2.3 permet de conclure que la torsion de T_i est nulle pour tout i . C'est donc aussi le cas pour M . ■

On applique le lemme 2.2 d'addition des torsions à la décomposition :

$$Int(\bar{V}_1' \cup (\bar{T} \times [-1, 1]) \cup \bar{V}_2').$$

On note que la torsion de $(\bar{T} \times [-1, 1], \bar{\xi}_n|_{\bar{T} \times [-1, 1]})$ est $n - 1$ ou n d'après le lemme 2.1 et que celle des deux autres composantes de la décomposition est nulle d'après le lemme 5.2. On en déduit que la torsion de $Int(\bar{V}_1' \cup (\bar{T} \times [-1, 1]) \cup \bar{V}_2'), \bar{\xi}_n|_{Int(\bar{V}_1' \cup (\bar{T} \times [-1, 1]) \cup \bar{V}_2')}$ vaut $n - 1, n, n + 1$ ou $n + 2$. D'après le lemme 5.1, c'est aussi le cas pour $(\bar{V}, \bar{\xi}_n)$.

On conclut en remarquant que :

$$n - 1 \leq Tor(V, \xi_n, C) \leq Tor(\bar{V}, \bar{\xi}_n).$$

5.2 Configuration b)

5.2.1 Cas b_1)

Cette fois, on suppose qu'il existe un revêtement $p : \tilde{V} \rightarrow V$ de V conjugué au produit $R \times S^1 \times R$ où T possède deux relevés \tilde{T}_1 et \tilde{T}_2 qui sont des anneaux. Dans la construction de ξ_n sur V , on part d'un voisinage tubulaire $T \times [-1, 1]$ de T . Dans \tilde{V} , on note $\tilde{T}_1 \times [-1, 1]$ et $\tilde{T}_2 \times [-1, 1]$ les deux voisinages de \tilde{T}_1 et \tilde{T}_2 qui relèvent $T \times [-1, 1]$. D'après le lemme 3.2, on peut supposer que $\tilde{V} = R \times S^1 \times R$ avec, pour tout $t \in [-1, 1]$, $\tilde{T}_1 \times \{t\} = R \times S^1 \times \{-2 + t\}$ et $\tilde{T}_2 \times \{t\} = R \times S^1 \times \{2 + t\}$. On note \tilde{V}_1' et \tilde{V}_2' les deux composantes de $p^{-1}(V \setminus (T \times [-1, 1]))$ adjacentes à, respectivement, $\tilde{T}_1 \times [-1, 1]$ et $\tilde{T}_2 \times [-1, 1]$ et qui ne rencontrent pas le produit $R \times S^1 \times]-3, 3[$.

On remarque que pour $i = 1, 2$, il existe $j_i \in \{1, 2\}$ tel que \tilde{V}_i' revête \bar{V}_{j_i}' . On note p_{j_i} l'application de revêtement.

Comme, hormis $\tilde{T}_i \times \{\pm 1\}$, les composantes de $\partial \tilde{V}_i'$ sont des plans, la même démonstration que celle du lemme 5.1, basée sur le lemme 2.9 de classification des structures tendues sur le demi-espace, fournit que les sous-variétés $(R \times S^1 \times]-\infty, -3], \tilde{\xi}_n)$ et $(R \times S^1 \times [3, +\infty[, \tilde{\xi}_n)$

de $\tilde{V} = R \times S^1 \times R$ sont conjuguées aux variétés $(\tilde{V}_1', \tilde{\xi}_n|_{\tilde{V}_1'})$ et $(\tilde{V}_2', \tilde{\xi}_n|_{\tilde{V}_2'})$ privées de leurs composantes de bord non annulaires, et donc que :

$$(\tilde{V}, \tilde{\xi}_n) \simeq (Int(\tilde{V}_1' \cup (R \times S^1 \times [-3, 3]) \cup \tilde{V}_2'), \tilde{\xi}_n|_{Int(\tilde{V}_1' \cup (R \times S^1 \times [-3, 3]) \cup \tilde{V}_2')}).$$

On note q , comme dans le lemme 3.2, l'application de revêtement de \tilde{V} sur \bar{V} qui envoie \tilde{T}_1 sur \bar{T} . De la même façon que précédemment, comme, d'après le lemme 3.2, toutes les composantes de $\partial(q(Int(\tilde{V}_1' \cup (R \times S^1 \times [-3, 3]) \cup \tilde{V}_2')))$ sont des plans, on obtient que :

$$(\bar{V}, \bar{\xi}_n) \simeq (q(Int(\tilde{V}_1' \cup (R \times S^1 \times [-3, 3]) \cup \tilde{V}_2')), q_*\tilde{\xi}_n|'_{Int(\tilde{V}_1' \cup (R \times S^1 \times [-3, 3]) \cup \tilde{V}_2')}).$$

Remarque 5.3 : On prendra garde que, si $q(\tilde{V}_1') = \bar{V}_1'$ ou \bar{V}_2' , on n'a pas en revanche $q(\tilde{V}_2') = \bar{V}_2'$ ou \bar{V}_1' .

Pour simplifier les notations, on suppose que $q(\tilde{V}_1') = \bar{V}_1'$, et donc en particulier que $j_1 = 1$.

On veut montrer que la torsion est finie sur \bar{V} . D'après l'isomorphisme précédent, il suffit de considérer un produit $P = T^2 \times [0, 2\pi]$ plongé de manière π_1 -injective dans $(q(Int(\tilde{V}_1' \cup (R \times S^1 \times [-3, 3]) \cup \tilde{V}_2')), q_*\tilde{\xi}_n|'_{Int(\tilde{V}_1' \cup (R \times S^1 \times [-3, 3]) \cup \tilde{V}_2')})$.

Soient \bar{V}_1'' et \bar{V}_2'' , les sous-variétés de \bar{V} obtenues en retirant à \bar{V}_1' et \bar{V}_2' les composantes de bord autres que $\bar{T} \times \{\pm 1\}$. On rappelle que, d'après [Si], pour $i = 1, 2$, $\bar{V}_i'' \simeq T^2 \times [0, +\infty[$. D'après l'étude du cas a), et notamment le lemme 5.2, la torsion est nulle sur \bar{V}_i'' .

On remarque alors que si $k_1, k_2 \in N$ sont assez grand, $P \cap q(\tilde{V}_i')$ est inclus dans $T^2 \times [0, k_1] \subset \bar{V}_1'' \simeq T^2 \times [0, +\infty[$ si $i = 1$, et dans $p_{j_2}^{-1}(T^2 \times [0, k_2]) \subset q(\tilde{V}_2) \simeq \tilde{V}_2$ pour $i = 2$, où $T^2 \times [0, k_2] \subset \bar{V}_2'' \simeq T^2 \times [0, +\infty[$.

De plus, d'après le lemme 2.4, il existe $(c_1, c_2, \theta_1, \theta_2) \in R^4$ (indépendant de k_1 et k_2) tel que, pour $i = 1, 2$, $(T^2 \times [0, k_i], \bar{\xi}_n|_{T^2 \times [0, k_i]})$ se plonge dans $(T^2 \times [0, c_i], \ker(\cos(\theta + \theta_i)dx + \sin(\theta + \theta_i)dy))$.

Ainsi, par passage au revêtement, on en déduit que le rappel par q de P dans \tilde{V} se plonge dans le modèle

$$(W, \zeta) \simeq (R \times S^1 \times [0, c_1], \ker(\cos(\theta + \theta_1)dx + \sin(\theta + \theta_1)dy)) \cup (R \times S^1 \times [-3, 3], \tilde{\xi}_n|_{R \times S^1 \times [-3, 3]}) \\ \cup (R \times S^1 \times [0, c_2], \ker(\cos(\theta + \theta_2)dx + \sin(\theta + \theta_2)dy))$$

(où on identifie $R \times S^1 \times \{0\}$ avec $R \times S^1 \times \{-3\}$ d'une part, et avec $R \times S^1 \times \{3\}$ d'autre part). La variété (W, ζ) est obtenue par collage de trois variétés de contact universellement tendues le long d'anneaux $(R \times S^1 \times \{\pm 3\})$ dans un voisinage tubulaire desquels la structure a par construction une équation du type $\cos(\theta + \theta_0)dx + \sin(\theta + \theta_0)dy = 0$, où $\theta \in [-\epsilon', \epsilon']$ désigne la coordonnée transverse. En particulier, la version annulaire du théorème de recollement 4.3 fournit que (W, ζ) est universellement tendue.

On est de plus bien dans les hypothèses du lemme 2.8 : sa conclusion s'applique et la torsion annulaire est finie sur (W, ζ) .

On conclut la démonstration du théorème 4.6. en remarquant que :

$$Tor(V, \xi_n, C) \leq Tor(\bar{V}, \bar{\xi}_n) \leq Tor(W, \zeta).$$

5.2.2 Cas b_2)

L'étude dans ce cas est essentiellement un mélange de celle des configuration $a)$ et $b_1)$, c'est pourquoi on se contente d'en résumer les étapes. On note \bar{V}_1' et \bar{V}_2' les deux relevés de $V \setminus (T \times]-1, 1[)$ dans \bar{V} inclus dans \bar{V}_1 et \bar{V}_2 . On note P' le produit bordé dans \bar{V} par les composantes toriques de $\partial\bar{V}_i'$. Comme les composantes de bord de $\bar{V}_1' \cup P' \cup \bar{V}_2'$ sont des plans, on obtient, comme dans l'étude du cas $a)$, un isomorphisme :

$$(\bar{V}, \bar{\xi}_n) \simeq (Int(\bar{V}_1' \cup P' \cup \bar{V}_2'), \bar{\xi}_n|_{Int(\bar{V}_1' \cup P' \cup \bar{V}_2')}).$$

Pour conclure il faut rappeler que, pour $i = 1, 2$, la variété obtenue en retirant à \bar{V}_i' ses composantes de bord non compactes est conjuguée à $T^2 \times [0, +\infty[$ et que la torsion y est finie (lemme 5.2). La torsion est également finie sur P' , par exemple par application du corollaire 2.8 à un revêtement cyclique de P' . On applique alors le lemme d'addition des torsions 2.2 à la décomposition ci-dessus pour obtenir que la torsion de $(\bar{V}, \bar{\xi}_n)$ est finie, et donc aussi celle de (V, ξ) dans la classe C de T .

5.2.3 Cas b_3)

Dans le cas $b_3)$, on sait qu'il existe un revêtement W de V , conjugué à $R \times S^1 \times S^1$, dans lequel T possède un relevé conjugué à $R \times S^1 \times \{*\}$. Dans ce cas, le lemme 2.7 affirme que la torsion annulaire de W est finie, ce qui implique à nouveau immédiatement le théorème 4.6.

Références

- [Co1] V. Colin, Recollement de variétés de contact tendues, Bull. Soc. math. France, 127 (1999), p. 101-127.
- [Co2] V. Colin, Sur la torsion des structures de contact tendues, à paraître dans Ann. Scient. Éc. Norm. Sup..
- [El1] Y. Eliashberg, Classification of over-twisted contact structures on 3-manifolds, Inv. Math. 98 (1989), 623-637.
- [El2] Y. Eliashberg, Contact 3-manifolds, twenty years since J. Martinet's work, Ann. Inst. Fourier 42 (1992), 165-192.
- [El3] Y. Eliashberg, Filling by holomorphic discs and its applications, London Math. Soc. Lect. Notes Ser. 151 (1991), 45-67.
- [E-T] Y. Eliashberg et W. Thurston, Confoliations, Univ. Lect. Ser., vol. 13 (1998).
- [Ga] D. Gabai, Foliations and the topology of 3-manifolds, J. Diff. Geom. 18 (1983), 445-503.

- [Gi1] E. Giroux, Convexité en topologie de contact, *Comment. Math. Helvetici* 66 (1991), 18-33.
- [Gi2] E. Giroux, Topologie de contact en dimension 3, *Sém. Bourbaki* 760 (1992-93), 1-27.
- [Gi3] E. Giroux, Une structure de contact, même tendue est plus ou moins tordue, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, 27 (1994), 697-705.
- [Gi4] E. Giroux, Une infinité de structures de contact tendues sur une infinité de variétés, *Invent. Math.*, 135 (1999), 789-802.
- [Gi5] E. Giroux, Structures de contact en dimension 3 et bifurcations des feuilletages de surfaces, *Invent. Math.*, 141 (2000), 615-689.
- [Gi6] E. Giroux, Tomographie des structures de contact en dimension 3, *Habilitation de l'Éns Lyon* (2000), 1-41.
- [Gr] M. Gromov, Pseudo-holomorphic curves in symplectic manifolds, *Invent. Math.*, 82 (1985), 307-347.
- [He] J. Hempel, *Three manifolds*, Ann. Math. Stu., Princeton Univ. Press.
- [Ho] K. Honda, On the classification of tight contact structures I: lens spaces, solid tori, and $T^2 \times I$, *prépublication* (1999).
- [HKM] K. Honda, W. Kazez et G. Matić, Tight contact structures and taut foliations, *prépublication* (2000).
- [Ja] W. Jaco, *Lectures on three manifolds topology*, A.M.S.
- [J-S] W. Jaco et P. B. Shalen, Seifert fibered spaces in 3-manifolds, *Mem. AMS*, 220 (1979).
- [Jo] K. Johannson, Homotopy equivalences of 3-manifolds with boundary, *Springer LNM*, 761 (1979).
- [Ka] Y. Kanda, The classification of tight contact structures on the 3-torus, *Comm. in Anal. and Geom.* 5 (1997), 413-438.
- [Si] J. Simon, Compactification of covering spaces of compact 3-manifolds, *Michigan Math. J.* 23 (1976) 245-256.
- [Su] D. Sullivan, A homological characterization of foliations consisting of minimal surfaces, *Comment. Math. Helv.*, 54 (1979), 218-223.
- [Wa] F. Waldhausen, On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large, *Ann. of Math.* 87 (1968), 56-88.

Vincent Colin
Université de Nantes
Département de mathématiques
UMR 6629 du CNRS
2, rue de la Houssinière
BP 92208, 44322 Nantes cedex 3
Vincent.Colin@math.univ-nantes.fr